Village des sciences de Hyères 2024

De l'échelle micro à l'échelle macro : comment les mathématiques peuvent aider à décrire l'évolution du trait de côte

M. Ersoy, C. Poussel [b]

b. ersoy@univ-tln.fr, poussel@outlook.com

1. Pourquoi s'intéresser à l'évolution du trait de côte ?
2. Comment les mathématiques peuvent aider à comprendre ce phénomène ?
3. Encore des mathématiques ... mais sous une forme numérique
4. n pas vers la prévision d'évenements futurs !
5. L'intelligence artificielle : un début de la fin de l'intelligence ou une réelle avancée scientifique ?

Outline

Contexte général : ing. côtière, dév. durable et changement climatique

Application : plage sableuse

→ 1/3 des plages sont sablonneuses et 1/4 s'érodent à des taux de 0,5m/an en raison de l'élévation du niveau de mer

→ impact socio-économique

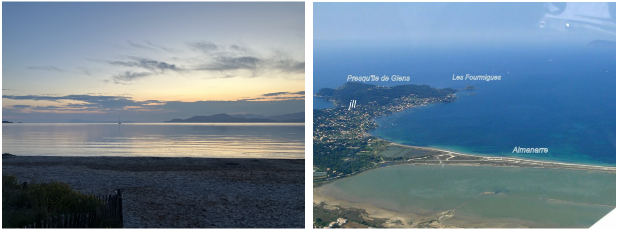


Figure – Plage de l'Almanarre, commune de Hyères [a]

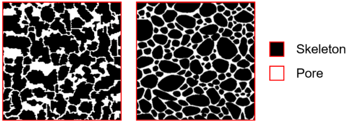
A. Luijendijk et al.
The State of the World's Beaches.
Nature, Scientific Reports, 2018

M. I. Vousdoukas et al.
Sandy coastlines under threat of erosion
Nature, Climate Change, 2020

Contexte général : ing. côtière, dév. durable et changement climatique

Application : plage sableuse

Un milieu poreux



Grain diameter range	Type name	Common name
> 256 mm	Boulder	Stone
64 mm – 256 mm	Cobble	
4 mm – 64 mm	Pebble	Gravel
2 mm – 4 mm	Granule	
0.5 mm – 2 mm	Coarse sand	Sand
0.25 mm – 0.5 mm	Medium sand	
1/16 mm – 0.25 mm	Fine sand	
1/256 mm – 1/16 mm	Silt	Mud
< 1/256 mm	Clay	

Figure – Représentation schématique de deux milieux poreux et granulométrie

Contexte général : ing. côtière, dév. durable et changement climatique
Application : plage sableuse
Un milieu poreux

- variables : porosité Φ, tortuosité m, mouillabilité $\mathcal{W}$, saturation S, perméabilité $\mathbf{k}$, etc.

Contexte général : ing. côtière, dév. durable et changement climatique
Application : plage sableuse
Un milieu poreux

- variables : porosité Φ, tortuosité m, mouillabilité $\mathcal{W}$, saturation S, perméabilité $\mathbf{k}$, etc.
- forces : forces intermoléculaires : force de cohésion – tension superficielle, force d'adhésion – capillarité, force gravitationnelle, force de friction – viscosité, etc.

Contexte général : ing. côtière, dév. durable et changement climatique
Application : plage sableuse
Un milieu poreux

- variables : porosité Φ, tortuosité m, mouillabilité $\mathcal{W}$, saturation S, perméabilité $\mathbf{k}$, etc.
- forces : forces intermoléculaires : force de cohésion – tension superficielle, force d'adhésion – capillarité, force gravitationnelle, force de friction – viscosité, etc.
- Différents régimes hydrodynamiques ("petite" échelle)

Figure – Représentation schématique de deux milieux poreux

Contexte général : ing. côtière, dév. durable et changement climatique
Application : plage sableuse
Un milieu poreux

- variables : porosité Φ, tortuosité m, mouillabilité $\mathcal{W}$, saturation S, perméabilité $\mathbf{k}$, etc.
- forces : forces intermoléculaires : force de cohésion – tension superficielle, force d'adhésion – capillarité, force gravitationnelle, force de friction – viscosité, etc.
- Différents régimes hydrodynamiques ("petite" échelle)
- Régime globale ("grande" échelle)

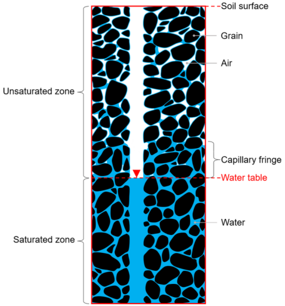


Figure – Représentation schématique de deux milieux poreux

Contexte général : ing. côtière, dév. durable et changement climatique
Application : plage sableuse
Un milieu poreux
Problèmes majeurs

- mesures expérimentales = coûteuses et limitées

D. Sous et al.
Field evidence of swash groundwater circulation in the microtidal rousty beach.
Advances in Water Resources, 2016

Contexte, Modélisation & Challenges

Contexte général : ing. côtière, dév. durable et changement climatique
Application : plage sableuse
Un milieu poreux
Problèmes majeurs

- mesures expérimentales = coûteuses et limitées
- multi-échelle, sensibilité aux paramètres, milieux hétérogènes, échelle très fine non atteignable numériquement
  $\rightsquigarrow$ Homogénéisation, REV (Representative Elementary Volume), Stochastique ?

D. Sous et al.
Field evidence of swash groundwater circulation in the microtidal rousty beach.
Advances in Water Resources, 2016

G. Allaire
Homogenization and Two-Scale Convergence.
Journal on Mathematical Analysis, 1992

U. Hornung
Homogenization and Porous Media.
Springer New York, 1997

S. Whitaker
Flow in porous media I : A theoretical derivation of Darcy's law.
Transport in Porous Media, 1986

M. Quintard, S. Whitaker
Transport in ordered and disordered porous media I : The cellular average and the use of weighting functions.
Transport in Porous Media, 1994

G. Dagan
The generalization of Darcy's Law for nonuniform flows.
Water Resources Research, 1979

D. Zhang
Stochastic Methods for Flow in Porous Media.
Elsevier, 2002

Principe d'une REV

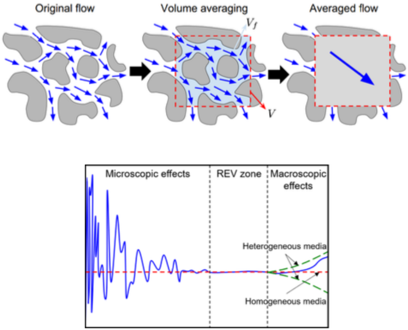


Figure – Principe

Principe d'une REV

Loi de Darcy

$$\bar{q} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu}\nabla(\bar{p} + \rho g z)$$

où $\mathbf{k}$ est le tenseur de perméabilité.

Sous les hypothèses

- $\partial_t \Phi = 0$
- phase air connectée continûment à l'air à pression atmosphérique
- pression air hydrostatique

Sous les hypothèses

- $\partial_t \Phi = 0$
- phase air connectée continûment à l'air à pression atmosphérique
- pression air hydrostatique

$\rightarrow$ **Équation de Richards**

$$\partial_t \theta(h - z) - \nabla \cdot (\mathbb{K}(h - z) \nabla h) = 0$$

- $h = \dfrac{p}{\rho g}$ (charge hydraulique),
- $S = P_c(p) = P_c(\rho g h)$ (relation de rétention d'eau)
- $\mathbb{K}(S) = \dfrac{\rho g}{\mu} \mathbf{k}(S)$ (tenseur de perméabilité)
- $\theta(S) = \Phi S$ (teneur en eau)

Sous les hypothèses

- $\partial_t \Phi = 0$
- phase air connectée continûment à l'air à pression atmosphérique
- pression air hydrostatique

$\rightarrow$ Équation de Richards

$$\partial_t \theta(h - z) - \nabla \cdot (\mathbb{K}(h - z)\nabla h) = 0$$

Propriété hydraulique (fermeture)

$\mathbb{K} = \mathbb{K}_s K_r$ où $\mathbb{K}_s$ est le tenseur de conductivité hydraulique saturé et K_r relatif
où $\psi = h - z$, $K_r(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \psi \geq 0 \\ K_{\text{loi}} & \text{si} \quad \psi < 0 \end{cases}$ et $S_e(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \psi \geq 0 \\ S_{\text{loi}} & \text{si} \quad \psi < 0 \end{cases}$

Name	Expression	Parameters
Gardner-Irmay relations (1958) [68, 69]	$S_e = e^{\frac{\alpha\psi}{m}}$ $K_r = e^{\alpha\psi}$	α: pore-size distribution [-] m: tortuosity [-]
Vachaud's relations (1971) [70]	$S_e = \frac{C}{C + \lvert\psi\rvert^D}$ $K_r = \frac{A}{A + \lvert\psi\rvert^B}$	A, C: empirical shape parameters [$L^{B;D}$] B, D: empirical shape parameters [-]

Équation de Richards (bilan)

Sous les hypothèses

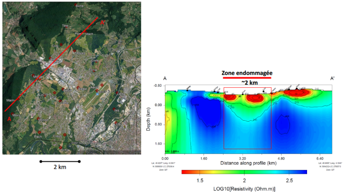
- $\partial_t \Phi = 0$
- phase air connectée continûment à l'air à pression atmosphérique
- pression air hydrostatique

$\rightarrow$ Équation de Richards

$$\partial_t \theta(h - z) - \nabla \cdot (\mathbb{K}(h - z)\nabla h) = 0$$

Propriété hydraulique (fermeture)

Aparté séisme : loi de comportement et interaction fondamentale



Sous les hypothèses

- $\partial_t \Phi = 0$
- phase air connectée continûment à l'air à pression atmosphérique
- pression air hydrostatique

$\rightarrow$ Équation de Richards

$$\partial_t \theta(h-z) - \nabla \cdot (\mathbb{K}(h-z)\nabla h) = 0$$

Propriété hydraulique (fermeture)

Challenges

- Problème fortement non-linéaire parabolique dégénérée
- Échelle de temps lente + régimes $\psi \geq 0$, $\psi \ll 0$, $\psi \to 0^-$ complexes
- Convergence très lente et calibrage des méthodes numériques nécessaires ! ! !

Generic non-linear problem

For a given f in $L^2(\Omega)$, find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{rcll} -(K(x,u)u')' & = & f, & \text{in } \Omega \\ u & = & 0, & \text{on } \partial\Omega \end{array} \right.$$

assuming that

$$(\mathcal{H}) : \quad 0 < K_0 \leq K(x,u) \leq K_1, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall u \in L^2(\Omega)$$

Generic non-linear problem
For a given f in $L^2(\Omega)$, find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

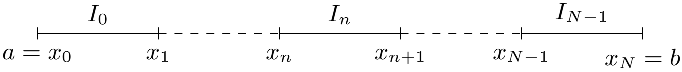
$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{rcll} -(K(x,u)u')' & = & f, & \text{in } \Omega \\ u & = & 0, & \text{on } \partial\Omega \end{array} \right.$$

assuming that

$$(\mathcal{H}): \quad 0 < K_0 \leq K(x,u) \leq K_1, \quad \forall x \in \Omega, \ \forall u \in L^2(\Omega)$$

Objectives : Construction of a cv parameterless numerical scheme

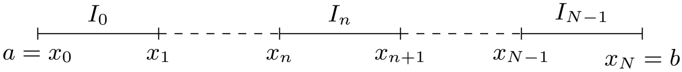
Let $a = x_0 < ... < x_N = b$ be a mesh $\mathcal{E}_h$ of $\Omega = [a, b]$ and denote $I_n = (x_n, x_{n+1})$ a cell :



We define :

$$|I_n| = h = \frac{b-a}{N}, \quad \forall n \in \{0, .., N-1\}.$$

Let $a = x_0 < ... < x_N = b$ be a mesh $\mathcal{E}_h$ of $\Omega = [a, b]$ and denote $I_n = (x_n, x_{n+1})$ a cell :

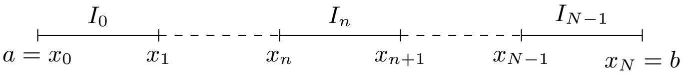


Let us define the finite element subspace :

$$V_h^p = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \forall I_n \in \mathcal{E}_h,\ v_{|I_n} \in \mathbb{P}_p(I_n) \right\}$$

the set of piecewise polynomials functions

Let $a = x_0 < \ldots < x_N = b$ be a mesh $\mathcal{E}_h$ of $\Omega = [a, b]$ and denote $I_n = (x_n, x_{n+1})$ a cell :



Let us define the finite element subspace :

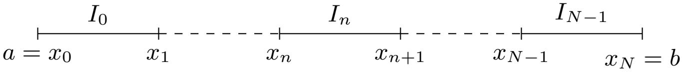
$$V_h^p = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \forall I_n \in \mathcal{E}_h,\ v_{|I_n} \in \mathbb{P}_p(I_n) \right\}$$

the set of piecewise polynomials functions

$\Rightarrow$ Basis function are not continuous contrary to FEM methods

$\Rightarrow$ $v \in V_h^p$ not necessarily continuous on x_n

Let $a = x_0 < \ldots < x_N = b$ be a mesh $\mathcal{E}_h$ of $\Omega = [a, b]$ and denote $I_n = (x_n, x_{n+1})$ a cell :



Let us define the finite element subspace :

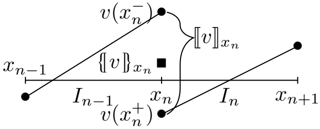
$$V_h^p = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \forall I_n \in \mathcal{E}_h,\ v_{|I_n} \in \mathbb{P}_p(I_n) \right\}$$

the set of piecewise polynomials functions

- $\Rightarrow$ Basis function are not continuous contrary to FEM methods
- $\Rightarrow$ $v \in V_h^p$ not necessarily continuous on x_n

Define the jump and the average at x_n :

$$[\![v]\!]_{x_n} = v(x_n^-) - v(x_n^+), \quad \{\!\!\{ v \}\!\!\}_{x_n} = \frac{1}{2}\left(v(x_n^-) + v(x_n^+) \right)$$



- Incomplete Interior Penalty Galerkin (IIPG) method introduced by Dawson, Sun and Wheeler.

Rearrange the Discontinuous Galerkin formulation, assuming that $[\![K(x,\bar{u})u_h']\!]_{x_n} = 0$:

C. Dawson et al.
Compatible algorithms for coupled flow and transport.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004

- Incomplete Interior Penalty Galerkin (IIPG) method introduced by Dawson, Sun and Wheeler.

Rearrange the Discontinuous Galerkin formulation, assuming that $[\![K(x,\bar{u})u_h']\!]_{x_n} = 0$:

$$\tilde{a}_h(u_h, v_h) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} K(x,\bar{u})u_h'v_h'dx - \sum_{n=0}^{N-1} \left[K(x,\bar{u})u_h'v_h \right]_{x_n^+}^{x_{n+1}^-}$$

- Incomplete Interior Penalty Galerkin (IIPG) method introduced by Dawson, Sun and Wheeler.

Rearrange the Discontinuous Galerkin formulation, assuming that $[\![K(x,\bar{u})u_h']\!]_{x_n} = 0$:

$$\tilde{a}_h(u_h, v_h) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} K(x,\bar{u})u_h' v_h' dx - \sum_{n=0}^{N} [\![K(x,\bar{u})u_h' v_h]\!]_{x_n}$$

with $[\![ab]\!] = [\![a]\!]\{\!\{b\}\!\} + \{\!\{a\}\!\}[\![b]\!]$

- Incomplete Interior Penalty Galerkin (IIPG) method introduced by Dawson, Sun and Wheeler.

Rearrange the Discontinuous Galerkin formulation, assuming that $[\![K(x,\bar{u})u_h']\!]_{x_n} = 0$:

$$\tilde{a}_h(u_h, v_h) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} K(x,\bar{u}) u_h' v_h' dx - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{K(x,\bar{u})u_h'\}\!\}_{x_n} [\![v_h]\!]_{x_n}$$

with $[\![ab]\!] = [\![a]\!]\{\!\{b\}\!\} + \{\!\{a\}\!\}[\![b]\!]$

- Incomplete Interior Penalty Galerkin (IIPG) method introduced by Dawson, Sun and Wheeler.

Rearrange the Discontinuous Galerkin formulation, assuming that $[\![K(x,\bar{u})u_h']\!]_{x_n} = 0$ and with penalization parameters σ_n :

$$\tilde{a}_h(u_h, v_h) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} K(x,\bar{u})u_h' v_h' dx - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{K(x,\bar{u})u_h'\}\!\}_{x_n} [\![v_h]\!]_{x_n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sigma_{n-1}+\sigma_n}{2h} [\![u_h]\!]_{x_n} [\![v_h]\!]_{x_n}$$

- Incomplete Interior Penalty Galerkin (IIPG) method introduced by Dawson, Sun and Wheeler.

Rearrange the Discontinuous Galerkin formulation, assuming that $[\![K(x,\bar{u})u_h']\!]_{x_n} = 0$ and with penalization parameters σ_n :

$$\tilde{a}_h(u_h,v_h) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} K(x,\bar{u})u_h' v_h' dx - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{K(x,\bar{u})u_h'\}\!\}_{x_n} [\![v_h]\!]_{x_n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sigma_{n-1}+\sigma_n}{2h} [\![u_h]\!]_{x_n} [\![v_h]\!]_{x_n}$$

$$+ \frac{\sigma_0}{h} [\![u_h]\!]_{x_0} [\![v_h]\!]_{x_0} + \frac{\sigma_N}{h} [\![u_h]\!]_{x_N} [\![v_h]\!]_{x_N}$$

- Incomplete Interior Penalty Galerkin (IIPG) method introduced by Dawson, Sun and Wheeler.

Rearrange the Discontinuous Galerkin formulation, assuming that $[\![K(x,\bar{u})u_h']\!]_{x_n} = 0$ and with penalization parameters σ_n :

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_h(u_h, v_h) = & \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} K(x,\bar{u})u_h' v_h' dx - \sum_{n=0}^{N} \{\!\!\{K(x,\bar{u})u_h'\}\!\!\}_{x_n} [\![v_h]\!]_{x_n} \\
& + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sigma_{n-1}+\sigma_n}{2h} [\![u_h]\!]_{x_n} [\![v_h]\!]_{x_n} \\
& + \frac{\sigma_0}{h} [\![u_h]\!]_{x_0} [\![v_h]\!]_{x_0} + \frac{\sigma_N}{h} [\![u_h]\!]_{x_N} [\![v_h]\!]_{x_N}
\end{aligned}
$$

and

$$
l_h(v_h) = \int_\Omega f v_h dx
$$

THEOREM (M.E., C. POUSSEL)

Let $p \geq 1$, u_h *be a sequence of approximate solutions generated by solving the discrete linearized problem* $(\tilde{\mathcal{V}}_h)$ *with penalty parameters ensuring coercivity. Then as* $h \to 0$

$$
\begin{aligned}
& u_h \longrightarrow u \text{ strongly in } L^2(\Omega) \\
& u_h' \longrightarrow u' \text{ strongly in } L^2(\Omega) \\
& |u_h|_J \to 0
\end{aligned}
$$

where $u \in H_0^1(\Omega)$ *is the unique solution of the problem* $(\mathcal{V})$.

D.A. Di Pietro and A. Ern
Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods.
Springer-Verlag, 2011

- lower bounds for penalization parameters

$$\begin{cases} \forall n,\ \varepsilon^{(n)} < 2,\ \sigma_n = \alpha\sigma_n^* \\ \text{with } \alpha > 1 \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \forall n \in \{1, ..., N-1\}, \\ \sigma_n^* = \dfrac{(K_1^{(n)} C_{tr})^2}{2\varepsilon^{(n)} K_0^{(n)}}; \\ \sigma_0^* = \dfrac{(K_1^{(0)} C_{tr})^2}{\varepsilon^{(0)} K_0^{(0)}}; \\ \sigma_N^* = \dfrac{(K_1^{(N-1)} C_{tr})^2}{\varepsilon^{(N-1)} K_0^{(N-1)}}. \end{cases}$$

T. Epshteyn and B. Riviere
Journal of Computational and Applied Mathematics.
Estimation of penalty parameters for symmetric interior penalty Galerkin methods, 2007

- lower bounds for penalization parameters

$$\begin{cases} \forall n,\ \varepsilon^{(n)} < 2,\ \sigma_n = \alpha \sigma_n^* \\ \text{with } \alpha > 1 \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \forall n \in \{1, ..., N-1\}, \\ \sigma_n^* = \dfrac{(K_1^{(n)} C_{tr})^2}{2\varepsilon^{(n)} K_0^{(n)}}; \\ \sigma_0^* = \dfrac{(K_1^{(0)} C_{tr})^2}{\varepsilon^{(0)} K_0^{(0)}}; \\ \sigma_N^* = \dfrac{(K_1^{(N-1)} C_{tr})^2}{\varepsilon^{(N-1)} K_0^{(N-1)}}. \end{cases}$$

- But ! can't consider σ_n as big as possible
  - $\Rightarrow$ Projection matrix condition number link to σ_n ! ! !

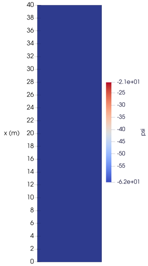
- lower bounds for penalization parameters

$$\begin{cases} \forall n,\ \varepsilon^{(n)} < 2,\ \sigma_n = \alpha\sigma_n^* \\ \text{with } \alpha > 1 \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \forall n \in \{1, ..., N-1\}, \\ \sigma_n^* = \dfrac{(K_1^{(n)} C_{tr})^2}{2\varepsilon^{(n)} K_0^{(n)}}; \\ \sigma_0^* = \dfrac{(K_1^{(0)} C_{tr})^2}{\varepsilon^{(0)} K_0^{(0)}}; \\ \sigma_N^* = \dfrac{(K_1^{(N-1)} C_{tr})^2}{\varepsilon^{(N-1)} K_0^{(N-1)}}. \end{cases}$$

- But ! can't consider σ_n as big as possible
  - $\Rightarrow$ Projection matrix condition number link to σ_n ! ! !
- α and ε must be selected properly !
  - $\Rightarrow$ based on Céa's lemma

1. Pourquoi s'intéresser à l'évolution du trait de côte ?
2. Comment les mathématiques peuvent aider à comprendre ce phénomène ?
3. Encore des mathématiques ... mais sous une forme numérique
4. n pas vers la prévision d'évenements futurs !
5. L'intelligence artificielle : un début de la fin de l'intelligence ou une réelle avancée scientifique ?

- Problem based on physical experiment
- Infiltration in soil
- Modeled by Richards' equation using Vachaud's relations



Haverkamp et al.
A Comparison of Numerical Simulation Models For One-Dimensional Infiltration.
Soil Science Society of America Journal, 1977

G. Vachaud and J-L. Thony
Hysteresis During Infiltration and Redistribution in a Soil Column at Different Initial Water Contents.
Water Resources Research, 1971

Haverkamp's test case

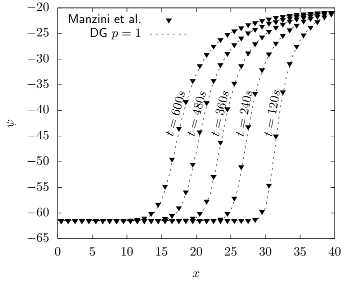


Figure – Code to code comparison

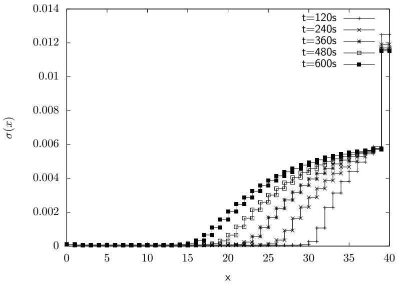


Figure – Penalization parameters

G. Manzini and S. Ferraris

Mass-conservative finite volume methods on 2-D unstructured grids for the Richards' equation.

Advances in Water Resources, 2004

Cas test : BARDEX

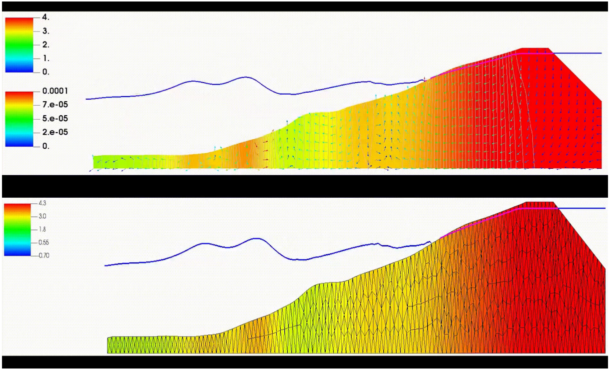


Figure – Cas test BARDEX, Delta Flume, Hollande

Ersoy et al.
A Saint-Venant Model for Overland Flows with Precipitation and Recharge.
Mathematical and computational applications, 2020

Ersoy et al.
A Richards' equation-based model for wave-resolving simulation of variably-saturated beach groundwater flow dynamics.
Journal of Hydrology, 2023

Cas test : Vauclin

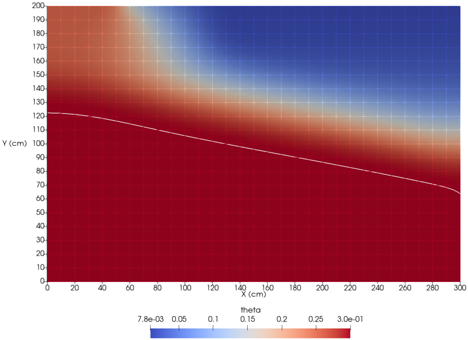
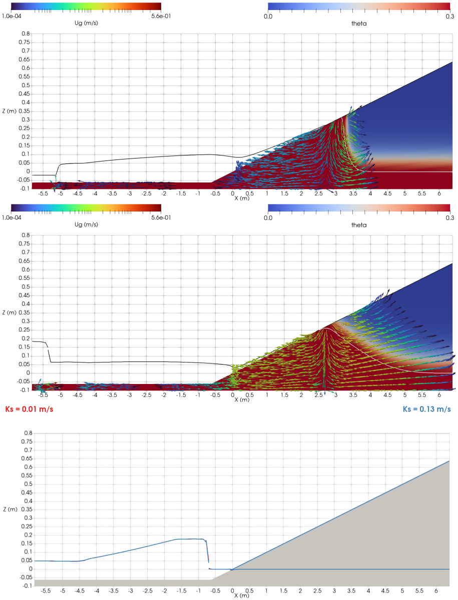


Figure – Cas test de Vauclin

Cas test : Steehauer



Outline

Outline

Outils de simulation en temps réel ?

- Code numérique : temps cpu très long $\rightarrow$ simulation en temps réel impossible !

- Code numérique : temps cpu très long $\rightarrow$ simulation en temps réel impossible !
- Solution ? AP ?

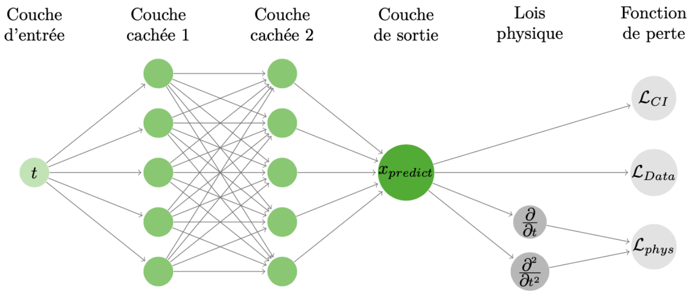


Figure – Architecture d'un réseau PINN

- Code numérique : temps cpu très long $\rightarrow$ simulation en temps réel impossible !
- Solution ? AP ?
- Un exemple très simple : $x(0) = x_0 = 1$, $x'(t) = -x(t)$, base d'entrainements 10 points réparties sur $[0, 0.4]$ et $T_f = 1$

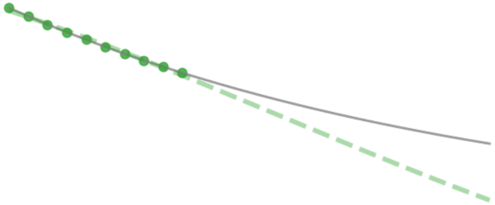


Figure – Prédiction via un réseau DNN (3 couches cachées, 32 neurones/couches, 1000 entrainements)

- Code numérique : temps cpu très long → simulation en temps réel impossible !
- Solution ? AP ?
- Un exemple très simple : $x(0) = x_0 = 1$, $x'(t) = -x(t)$, base d'entrainements 10 points réparties sur $[0, 0.4]$ et $T_f = 1$

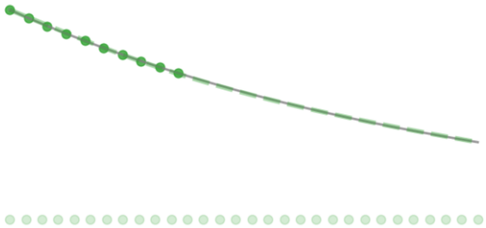


Figure – Prédiction via un réseau PINN (3 couches cachées, 1000 entrainements)

FIN